

المحاضرة 13

الثلاثاء 2018/5/8

التطبيقات القوية

نقول ان تطبيق  $T: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X', \mathcal{F}')$  هو تطبيق قوي من  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$

$$T^{-1}(F') \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (F' \in \mathcal{F}') \quad \text{معرفة}$$

اذا كان  $H$  حقا مولدا لـ  $\mathcal{F}$  فيكون التطبيق

$$T: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X', \mathcal{F}')$$

تطبيقا  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$  قويًا اذا وفقط اذا كان  $T^{-1}(H) \in \mathcal{F}$

أمثلة عن التطبيقات القوية

$$T: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X', \mathcal{F}')$$

$$F \rightarrow T(F)$$

ولكن  $x'_0 \in X'$  نقطة في  $\mathcal{F}$  ومنه  $T^{-1}(F') \in \mathcal{F}$  فيكون

$$T^{-1}(F') = \{x \in X : T(x) \in F'\}$$

$$= \{x \in X : x'_0 \in F'\}$$

$$= \begin{cases} X & ; x'_0 \in F' \\ \emptyset & ; x'_0 \notin F' \end{cases}$$

وبما ان  $\phi, X \in \mathcal{F}$  فانه

$$T^{-1}(F') \in \mathcal{F} \quad \forall F' \in \mathcal{F}'$$

هو تطبيق قوي من  $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$

(C)

اذا كان  $\mathcal{F} = 2^X$  فانه كل تطبيق من الشكل

$$T: (X, 2^X) \rightarrow (X', \mathcal{F}')$$



(3) لنكن  $x_0 \in F$  (هذا يعني ان  $x_0$  مجموعة جزئية من  $X$  فكلية)  
 عندئذ يكون  $x \cap F$  ته مسمى  $x_0$   
 ولتذكر ان  $F = x_0 \cap F$  عندئذ بقلوبة:  
 $T_0: (x_0, F_0) \rightarrow (x', F')$   
 يكون تطبيق  $(F, F_0)$  اقويوس

(4) التطبيق المستقر.  
 لنكن  $(x, \tau)$   $(x', \tau')$  ففانين مبدولين  
 (فد تكونا وضائين مترين) ، كذلك التطبيق  
 $T: (x, \tau) \rightarrow (x', \tau')$   
 عندئذ يكون  $T$  تطبيقاً مستقراً اذا كانت الصورة لـ  $\tau$  لـ  $\tau'$   
 مجموعة مفتوحة  $(x', \tau')$  هي مجموعة مفتوحة في  $(x, \tau)$   
 اي ان:

$T^{-1}(\tau') \subset \tau \Leftrightarrow T$  مستقر  
 فاذ كانت  $x$  و  $x'$  ففانين مترين فيكون كل تطبيق مستقر  
 هو تطبيق مستقر وهو تطبيق  $(B_x, B_{x'})$  اقويوس  
 حيث  $B_x, B_{x'}$  هي مجموعات  $x$  و  $x'$  على الترتيب

(5) لنأخذ الآن  $x = R^n$  ،  $F = B_{R^n}$   
 $x' = R^m$  ،  $F' = B_{R^m}$   
 عندئذ يكون التطبيق

$T: (R^m, B_{R^m}) \rightarrow (R^n, B_{R^n})$   
 تطبيقاً "ا"  $(B_{R^n} - B_{R^m})$  اقويوس اذا فقط اذا كانت  
 $T^{-1}(0^m) \subset 0^n$

حيث  $0^m, 0^n$  هي المجموعتان المصغرتان في  $R^m, R^n$  على الترتيب  
 فلهذه الحالة نقول ان التطبيق  $T$  اقويوس  $P$  بـ تحويل



(3)

تركيب التضمينات القوية

$$T: X_1 \rightarrow X_2$$

$$x_1 \rightarrow T(x_1) = x_2$$

$$S: X_2 \rightarrow X_3$$

$$x_2 \rightarrow S(x_2) = x_3$$

فيكون تركيب التضمينات هو، بالترتيب

$$S \circ T: X_1 \rightarrow X_3$$

$$x \rightarrow (S \circ T)(x) = x_3$$

والترتيب العكسي هو

$$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1} = X_3 \rightarrow X_1$$

$$x_3 \rightarrow (T^{-1} \circ S^{-1})(x_3) = x_1 = T^{-1}(S^{-1}(x_3))$$

مباشرة:

لكن

$$(x', F') \rightarrow T(x', F') \text{ تضميناً لـ } (x, F) \text{ تضميناً لـ } (x, F)$$

$$(x'', F'') \rightarrow T'(x'', F'') \text{ تضميناً لـ } (x', F') \text{ تضميناً لـ } (x, F)$$

عندئذ يكون التضمين

$$(T' \circ T)^{-1} \text{ التضمين لـ } (F, F'')$$

الإثبات:

$$T^{-1}(F') \subset F$$

حيث التضمينات لينة

$$T'^{-1}(F'') \subset F'$$

لذلك يكون

$$(T' \circ T)^{-1}(F'') = T'^{-1}(T^{-1}(F'')) \subset T^{-1}(F') \subset F$$

$$\text{وهنا بعض أمثلة: } (T' \circ T)^{-1} \text{ تضميناً لـ } (F, F'')$$

$$a \rightarrow b \rightarrow c$$











(6)

ولامفة:

اذا امكننا ان  $X' = \bar{R}$  مجموعة الانداد الحقيقة لمتري

وامكننا  $\bar{F} = \bar{B}_R$  مجموعة الانداد الحقيقة لمتري  $\bar{R}$

فيمكن دالة  $f$  لندال  $(\bar{F}, \bar{B}_R)$  متري دالة  $f$  بالشكل:

$$f: (X, \bar{F}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{B}_R)$$

وهنا علينا ان نرى ان  $f$  دالة  $f$  بالواقع فانه لندال  $f$  بالواقع

تألف من:

$$\bar{B}_R \supset B_R \cup \{-\infty\}, \bar{B}_R \cup \{+\infty\}, B_R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

يمكن التفسير من مجموع  $B_R$  بالشكل:

$$\bar{B}_R = \{A, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} : A \in B_R\}$$

لذلك تكون دالة  $f: (X, \bar{F}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{B}_R)$

هذه دالة  $f$  لندال  $(\bar{F}, \bar{B}_R)$  متري

$$f^{-1}(B_R) \subset \bar{F}$$

اذا كان

ولامفة:

فيما يلي نرى ان لندال الحقيقة المتري، بالشكل:

$$f: (X, \bar{F}) \rightarrow (\bar{R}, \bar{B}_R)$$

$$f: X \rightarrow \bar{R}$$

وهنا نرى ان  $f$  دالة  $f$  بالواقع

حيث نرى ان  $f$  دالة  $f$  بالواقع

$$E(f > c) = \{x \in E : f(x) > c\}$$

$$E(f \geq c) = \{x \in E : f(x) \geq c\}$$

$$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\}$$

$$E(f \leq c) = \{x \in E : f(x) \leq c\}$$

ولامفة:

$$f: X \rightarrow \bar{R}$$

نرى ان دالة  $f$



(7)

(1)  $f$  دالة  $\mathbb{R}$  متصلة (أي  $(f, \beta_R)$  متصلة)

(2) المجموعة  $E(f) \in \mathcal{F}$  من أجل كل عدد حقيقي  $c$

(3)  $E(f < c) \in \mathcal{F}$

(4)  $E(f \leq c) \in \mathcal{F}$

(5)  $E(f \geq c) \in \mathcal{F}$

و، العنصر  $f$  دالة  $\mathbb{R}$  تكون  $\mathcal{F}$  متصلة إذا و فقط إذا كانت  $E(f < c), E(f \leq c), E(f \geq c), E(f > c)$  متصلة من أجل كل عدد حقيقي  $c$

الإثبات:

إذا كانت الدالة  $f$  متصلة متكون  $E(f < c), E(f \leq c), E(f \geq c), E(f > c)$

هذه يعني  $E(f > c) \in \mathcal{F}$  وكذلك

$E(f > c) \in \mathcal{F}$  هذا يعني  $f^{-1}([c, \infty)) \in \mathcal{F}$

$E(f < c) \in \mathcal{F}$   $f^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}$

$E(f \leq c) \in \mathcal{F}$   $f^{-1}([-\infty, c]) \in \mathcal{F}$

هو اصل السؤال لمتصلة للبرهان (د)

لتفرض أن  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (أو  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ )

دالة متصلة عند  $x_0$  تكون لسؤال التالية متصلة

$f(x) \rightarrow f(x_0)$   $x \rightarrow x_0$

$f(x) \rightarrow f(x_0)$   $x \rightarrow x_0$

$f(x) \rightarrow f(x_0)$   $x \rightarrow x_0$   $(x \in X, g \neq 0)$

$f(x) \rightarrow f(x_0)$   $x \rightarrow x_0$   $f(x) \rightarrow f(x_0)$

$|f|$   $\max\{f, g\}$   $\min\{f, g\}$

$f > 0$  من أجل



(8)

تعريف:

ليكن  $(X, \mathcal{F})$  فضاء مترياً وليكن  $f: X \rightarrow R$  دالة. وليكن  $E \in \mathcal{F}'$ .  
 عندها نقول ان  $f$  متوسعة على المجموعة  $E$  اذا كان  
 $E \cap f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{B}_R$

ملاحظة:

(1) اذا كانت الدالة  $f$  متوسعة على دالة  $E$  وكانت  $E'$  مجموعة جزئية من  $E$  ومتوسعة فتكون  $f$  متوسعة على  $E'$ .  
 (2) اذا كانت  $E_1, E_2, \dots$  مجموعات متوسعة متبادلة فتكون  $f$  متوسعة على  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ .  
 (3) اذا كانت دالة  $f$  متوسعة على كل  $E_i$  فتكون  $f$  متوسعة على  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ .

ملاحظة:

اذا كان  $A(E) = 0$  فان دالة  $f$  متوسعة على  $E$  تكون متوسعة

النتيجة العامة التالية: